$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|(A_n - A)x\| \le \varepsilon$$

وبالتالي $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ (حسب مفهوم التقارب بالنظيم في $L_B(E_1,E_2)$ وهذا يعني أن الفضاء $L_B(E_1,E_2)$ هو فضاء باناخ) .

مبرهنة (١١) :

ليكن B_1 ، B_2 فضاءي باناخ ، عندئذٍ يكون فضاء المؤثرات الخطية المحدودة $L_B(B_1,B_2)$ فضاء باناخ. (وذلك حسب مفهوم التقارب النقطي).

الإثبات:

لتكن $\{A_n\}$ متتالية كوشي (أساسية) من المؤثرات في الفضاء $L_B(B_1,B_2)$.

بحسب مفهوم التقارب النقطي لمتتالية كوشي يكون:

$$\|A_n x - A_m x\| \xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}]{} 0$$

من أجل كل نقطة مثبتة $x \in B_1$.

بما أن الفضاء B_2 تام إذن يوجد عنصر $x \in B_2$ بحيث:

$$y = \lim_{n\to\infty} A_n x$$

وبذلك نكون قد عرفنا مؤثر A من الفضاء B_1 في الفضاء B_2 حيث $y = Ax$.

إن المؤثر A خطي ومحدود.

كون المؤثر A خطياً واضحاً بالاعتماد على خواص النهايات، ولنثبت أنه محدود.

في الحقيقة وبما أن $\{A_n\}$ هي متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة لدينا:

$$\|A_n x\| \le \|A_n\| \|x\| \quad ; \quad \forall x \in B_1, n = 1,2,\ldots$$

ولما كانت شروط المبرهنة (٨) (باناخ - شتينهاوس) أعلاه محققة يكون لدينا:

$$\|A_n\| \le C \quad ; \quad n = 1,2,\ldots \ \& \ C > 0$$

وهذا يعني بدوره أن:

$$\|A_n x\| \le C \|x\| \quad ; \quad \forall x \in B_1 \,, \ n = 1,2,\ldots \qquad (10)$$

وبما أن: $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ فإن $\|A_n x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|Ax\|$

فبأخذ نهاية طرفي المتراجحة (10) نحصل على:

$$\|Ax\| \le C\|x\| \;;\; \forall x \in B_1$$

وهذا يعني أن المؤثر A محدود.

مما سبق نستنتج أن $A \in L_B(B_1, B_2)$ وأن: $\|A_n x - Ax\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ في كل نقطة مثبتة $x \in B_1$.

(٥-٦) المؤثر المرافق (Adjoint operator):

لنأخذ المؤثر المستمر A من الفضاء الخطي G_1 إلى فضاء خطي آخر G_2 حيث:

$$y = Ax \quad , x \in G_1$$

وليكن g دالياً خطياً معرفاً ومستمراً على G_2 . نطبق الدالي g على العنصر y . بسهولة يمكننا التأكد من أن $g(Ax)$ هو دالي خطي مستمر معرف على G_1 ولنرمز لهذا الدالي بالرمز f .

إذن لكل دالي خطي مستمر معرف على G_2 مثل g وضعنا الدالي الخطي المستمر المعرف على G_1 الموافقة له f ، أي نكون قد حصلنا على مؤثر يطبق الداليات الخطية المستمرة المعرفة على G_2 في الفضاء G_1. هذا المؤثر ندعوه المؤثر المرافق للمؤثر A . ونرمز له بالرمز A^* إن لم يكن في ذلك إشكالات أخرى.

نرمز لقيم الدالي f على العنصر x بالرمز (f, x) ويكون:

$$(g, Ax) = (f, x)$$

أو:

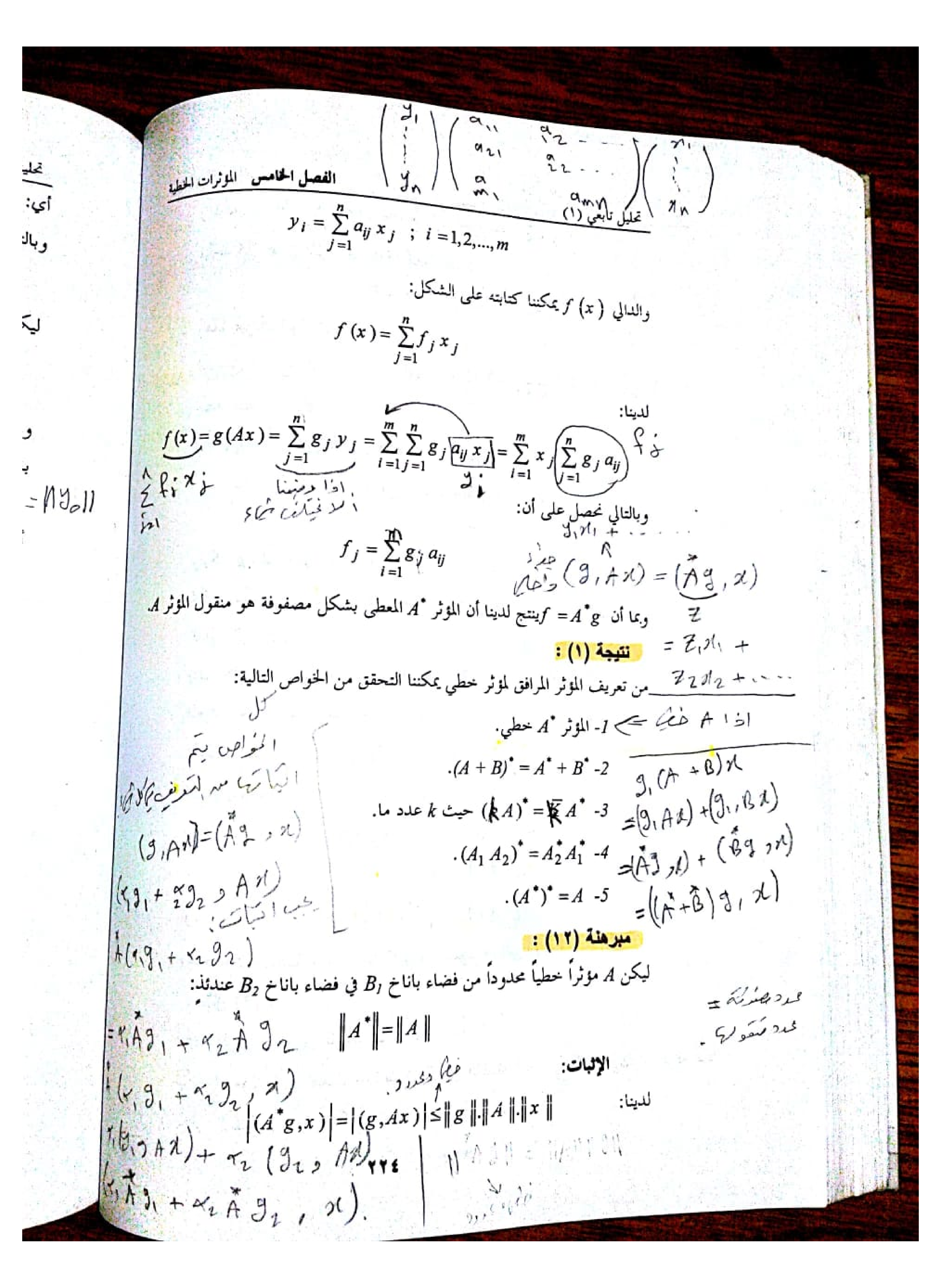
$$(g, Ax) = (A^* g, x)$$

وهذه العلاقة يمكننا استخدامها كتعريف للمؤثر المرافق أيضاً .

مثال (٣) :

لنأخذ المؤثر المرافق في الفضاءات ذات n بعداً.

ليكن A مؤثراً من الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}^n$ إلى الفضاء $\mathbb{R}^m$. ولتكن (a_{ij}) مصفوفة هذا المؤثر. التطبيق $Ax - y$ يمكننا كتابته بشكل جملة معادلات:



$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,m$$

والدالي $f(x)$ يمكننا كتابته على الشكل:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j x_j$$

لدينا:

$$f(x) = g(Ax) = \sum_{j=1}^{n} g_j y_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_j a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{m} x_j \sum_{j=1}^{n} g_j a_{ij}$$

وبالتالي نحصل على أن:

$$f_j = \sum_{i=1}^{m} g_j a_{ij}$$

وبما أن $f = A^* g$ ينتج لدينا أن المؤثر A^* المعطى بشكل مصفوفة هو منقول المؤثر A.

نتيجة (١) :

من تعريف المؤثر المرافق لمؤثر خطي يمكننا التحقق من الخواص التالية:

1- المؤثر A^* خطي.

2- $(A+B)^* = A^* + B^*$.

3- $(kA)^* = \bar{k} A^*$ حيث k عدد ما.

4- $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$.

5- $(A^*)^* = A$.

مبرهنة (١٢) :

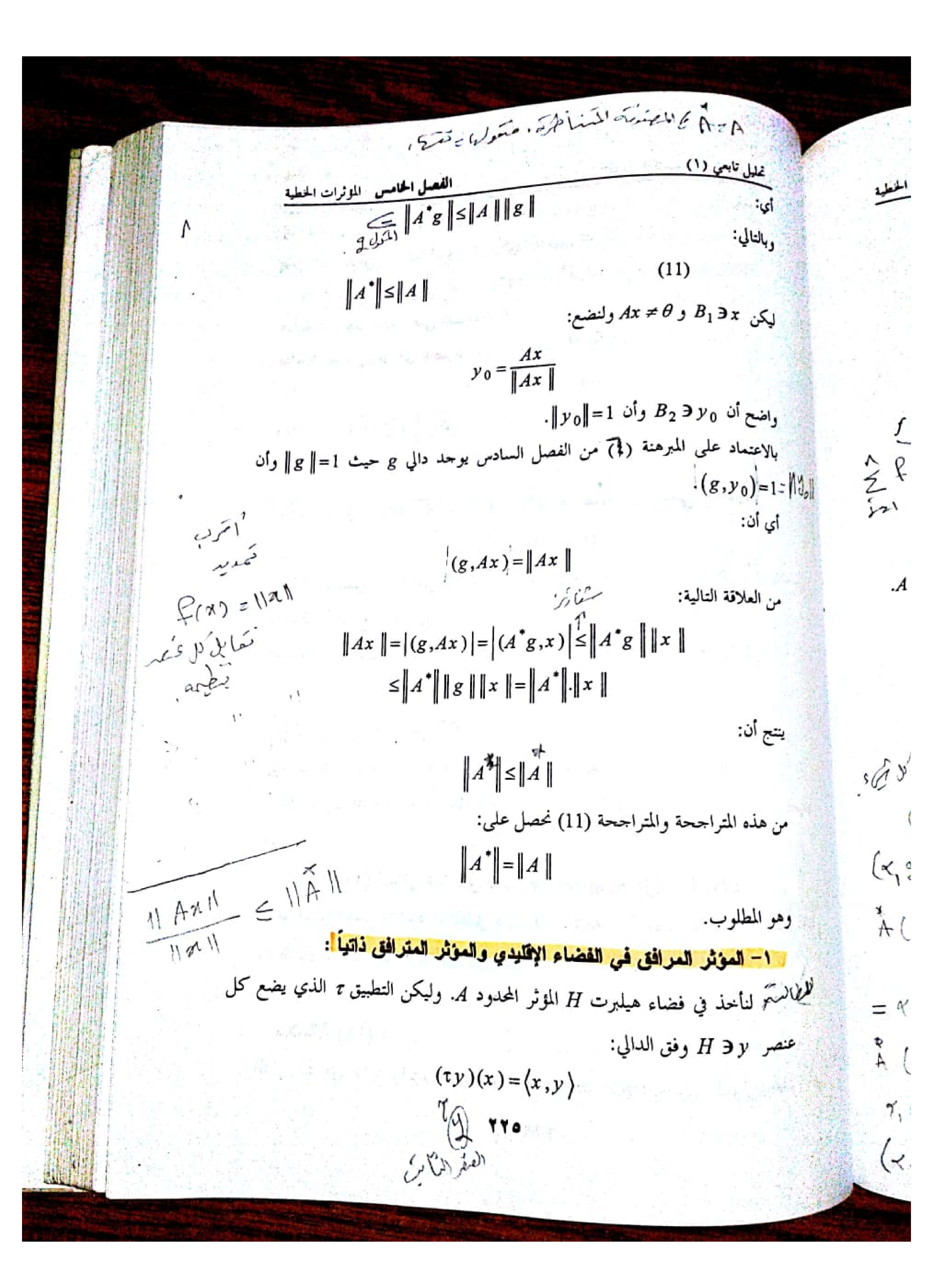
ليكن A مؤثراً خطياً محدوداً من فضاء باناخ B_1 في فضاء باناخ B_2 عندئذ:

$$\|A^*\| = \|A\|$$

الإثبات:

لدينا:

$$|(A^* g, x)| = |(g, Ax)| \le \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|$$



أي:

$$\|A^*g\| \le \|A\|\|g\|$$

وبالتالي:

$$\|A^*\| \le \|A\| \qquad (11)$$

ليكن $x \in B_1$ و $Ax \neq \theta$ ولنضع:

$$y_0 = \frac{Ax}{\|Ax\|}$$

واضح أن $y_0 \in B_2$ وأن $\|y_0\|=1$.

بالاعتماد على المبرهنة (4) من الفصل السادس يوجد دالي g حيث $\|g\|=1$ وأن $(g,y_0)=1$.

أي أن:

$$(g,Ax)=\|Ax\|$$

من العلاقة التالية:

$$\|Ax\|=|(g,Ax)|=|(A^*g,x)|\le\|A^*g\|\|x\|$$
$$\le\|A^*\|\|g\|\|x\|=\|A^*\|.\|x\|$$

ينتج أن:

$$\|A\|\le\|A^*\|$$

من هذه المتراجحة والمتراجحة (11) نحصل على:

$$\|A^*\|=\|A\|$$

وهو المطلوب.

١- المؤثر المرافق في الفضاء الإقليدي والمؤثر المترافق ذاتياً:

لنأخذ في فضاء هيلبرت H المؤثر المحدود A. وليكن التطبيق τ الذي يضع كل عنصر $y \in H$ وفق الدالي:

$$(\tau y)(x)=\langle x,y\rangle$$

إن الفضاءين H والفضاء H^* إيزرومورفيان.

فإذا كان A^* مؤثراً مرافقاً للمؤثر A فيكون التطبيق التالي:

$$\tilde{A}^* = \tau^{-1} A^* \tau$$

عبارة عن مؤثر محدود على الفضاء H.

نلاحظ أنه من أجل أي عنصرين y,x من الفضاء H يكون:

$$(Ax, y) = (x, \tilde{A}^* y)$$

ولما كان $\|A\| = \|A^*\|$ وكل من التطبيقين τ, τ^{-1} إيزومورفيزم نجد:

$$\|\tilde{A}^*\| = \|A\|$$

سنعتبر أن المؤثر المرافق $\tilde{A}^*$ للمؤثر A في $\mathbb{R}^n$ هو نفسه $\tilde{A}^*$ المعطى في العلاقة:

$$(Ax, y) = (x, \tilde{A}^* y)$$

أحياناً وللسهولة بدلاً من كتابة المؤثر المرافق في الفضاء $\mathbb{R}^n$ بالشكل $\tilde{A}^*$ يكتب بالشكل A^*، مع الانتباه إلى أن المقصود به هو المؤثر $\tilde{A}^*$ المعرف أعلاه.

اعتماداً على ذلك فإن المؤثر المرافق للمؤثر A في الفضاء الإقليدي بالشكل:

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

وذلك من أجل y,x من $\mathbb{R}^n$.

وبما أن المؤثرين A^* و A مطبقان على الفضاء نفسه يمكننا كتابة $A = A^*$.

بذلك نكون قد ميزنا صفاً خاصاً من المؤثرات في الفضاء الإقليدي (خصوصاً فضاء هيلبرت).

تعريف (١٤) المؤثر المترافق ذاتياً (self- Adjoint operator) :

ندعو المؤثر الخطي المحدود A المطبق على D_A الكثيفة في الفضاء H مؤثراً مترافقاً ذاتياً (تناظرياً) إذا كان $A = A^*$ أي:

$$(Ax, y) = (x, Ay) \; ; \; \forall x, y \in H$$

ملاحظة (١٢) :

المؤثر المترافق ذاتياً والمؤثر التناظري (*symmetric operator*) للمؤثر المحدود A

مفهومان متطابقان من أجل الفضاء H. أما في الحالة العامة فكل مؤثر مترافق ذاتياً هو مؤثر تناظري والعكس غير صحيح لأنه قد تكون ساحة تعريف المؤثر A^* المرافق لمؤثر تناظري A، أوسع من ساحة تعريف المؤثر A.

نتيجة (٢) :

إذا كانت متتالية المؤثرات $\{A_n\}$ متقاربة من المؤثر A (حسب مفهوم التقارب بالنظيم) عندئذ وبما أن $\|A\|=\|A^*\|$ تكون المتتالية $\{A_n^*\}$ متقاربة من A^* عندما $n \leftarrow \infty$.

تعريف (١٥) :

نقول عن المؤثر الخطي المحدود $A:H \longrightarrow H$ على فضاء هيلبرت إنه مترافق ذاتيا أو هرميتي إذا كان $A^*=A$ ، وإنه واحدي اذا كان A متبايناً وغامراً وكان $A^*=A^{-1}$، وإنه ناظمي إذا كان $AA^*=A^*A$.

: إذا كان A مترافقاً ذاتياً أو كان واحدياً فإنه ناظمي وليس لزاماً على المؤثر الناظمي أن يكون مترافقاً ذاتياً أو وحدياً . فمثلاً إذا كان $I:H \longrightarrow H$ وكان $A=2iI$ فإن $A^*=-2i\,I$ وبالتالي فإن $AA^*=A^*A=4I$ في حين $A^* \neq A$ كما أن $A^* \neq A^{-1}=-\frac{1}{2}i\,I$.

تعريف (١٦) :

نقول عن متتالية المؤثرات $\{A_n\}$ في فضاء هيلبرت H أنها تتقارب بضعف من المؤثر A إذا كان من أجل $f,g \in H$ لدينا:

$$(A_n f, g) \xrightarrow[n\to\infty]{} (Af, g)$$

من هنا ينتج أنه إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية من المؤثرات تتقارب بضعف من A عندئذ المتتالية $\{A_n^*\}$ تتقارب بضعف من A^* عندما $n \leftarrow \infty$.

أما إذا كان $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ (تقارباً نقطياً) فهذا لا يؤدي بالضرورة إلى أن $A_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} A^*$ (تقارب نقطي).

في الحقيقة لنأخذ على الفضاء ℓ_2 المؤثرات:

$\|A_n x\|_{\ell_2} = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$

$A_n : \ell_2 \to \ell_2$

تحليل تابعي (١)

$A_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \quad ; \; x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$

عندئذ لدينا:

$A_n^*(x_1, x_2, \ldots) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x_1, x_2, \ldots)$

هذا يكون $A_n x \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ وذلك من أجل أي $x \in \ell_2$.

ويكون:

$\|A_n^* x\| = \|x\|$

نتيجة (٣):

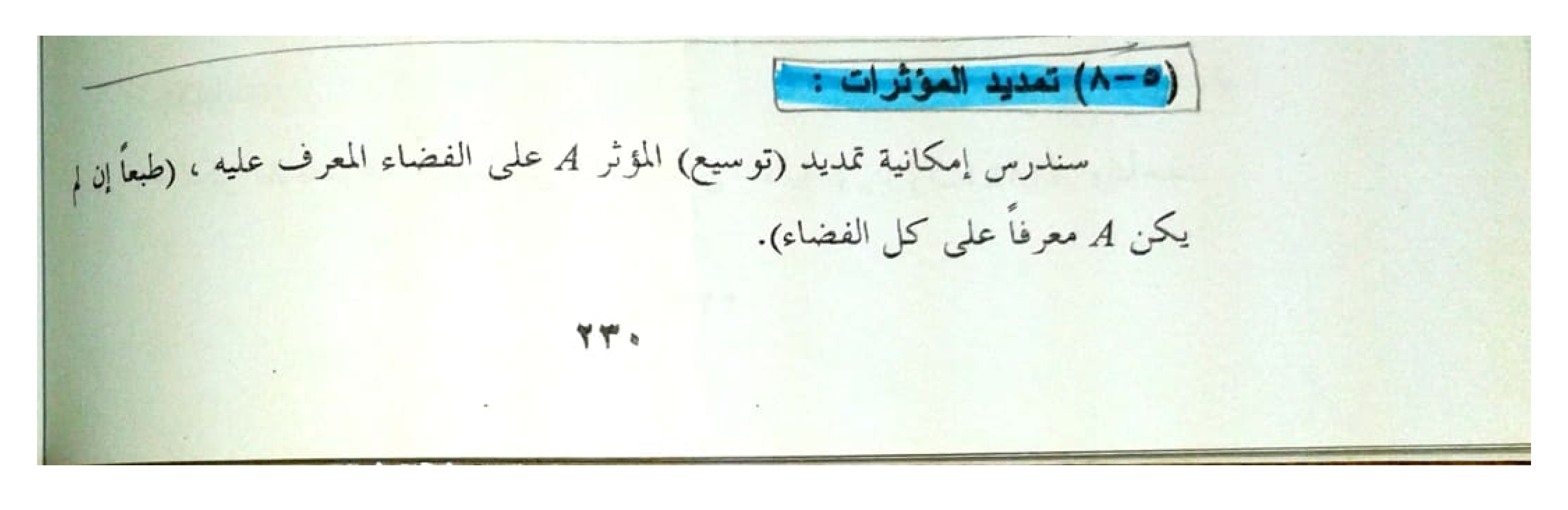
إذا وجد للمؤثر A مؤثر عكسي A^{-1} عندئذ:

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I$$

حيث I المؤثر الواحدي (المطابقة) . وبالتالي يوجد للمؤثر A^* مؤثر عكسي حيث:

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

(٥-٧) المؤثرات المتراصة (compact operators) :



(٥-٨) تمديد المؤثرات :

سندرس إمكانية تمديد (توسيع) المؤثر A على الفضاء المعرف عليه ، (طبعاً إن لم يكن A معرفاً على كل الفضاء).

تعريف (١٩) :

نسمي المؤثر $\tilde{A}$ تمديداً (أو توسيعاً) للمؤثر A إذا تحقق ما يلي:

1- $D(A) \subseteq D(\tilde{A})$.

2- $\tilde{A}x = Ax$، حيث $D(A) \ni x$.

مبرهنة (١٥) :

ليكن B_1 وB_2 فضاءي باناخ وليكن A مؤثراً خطياً من B_1 في B_2 بحيث $D(A) \subseteq B_1$ وكثيفة في B_1 ولنفترض أنه يوجد عدد ثابت $C \geq 0$ بحيث يكون:

$$\|Ax\|_{B_2} \leq C\|x\|_{B_1} \;\; ; \forall x \in D(A) \qquad (12)$$

عندئذٍ يوجد في الفضاء $L_B(B_1 \longrightarrow B_2)$ تمديد وحيد $\tilde{A}$ لـ A كما أن:

$$\|A\| = \|\tilde{A}\|$$

الإثبات:

ليكن $B_1 \ni x$. بما أن $D(A)$ كثيفة في B_1 فتوجد متتالية $D(A) \supseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث يكون $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ أي أن:

$$\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وحسب العلاقة (12) نجد:

$$\|Ax_n - Ax_m\|_{B_2} = \|A(x_n - x_m)\|_{B_2} \leq C\,\|x_n - x_m\| \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{} 0$$

وهذا يعني أن $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية كوشي في الفضاء B_2 وبما أن B_2 فضاء تام فيوجد عنصر $B_2 \ni y$ بحيث يكون $y = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$.

ولنثبت أن y مستقل عن اختيار المتتالية $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ من $D(A)$. لهذا السبب نأخذ متتالية أخرى $D(A) \supseteq \{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث يكون $x'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ أي $\|x'_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ فنجد:

$$\|Ax_n - Ax'_n\|_{B_2} = \|A(x_n - x'_n)\|_{B_2} \le C\|x'_n - x_n\|$$
$$\le C\left[\|x'_n - x_n\| + \|x'_n - x\|\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$= \|x'_n - x_n\| + \|x_n - x\|$$

أي أن:

$$\lim_{n\to\infty}(Ax'_n - Ax_n) = \theta_2$$

وبالتالي فإن:

$$\lim_{n\to\infty} Ax'_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = y$$

إذن y يتعلق فقط بـــ x وليس بالمتتالية المتقاربة من x.

لنضع الآن $y = \tilde{A}x$. ولنلاحظ ما يلي:

1- إذا كان $x \in D(A)$ فيكون $\tilde{A}x = Ax$.

وبما أن x اختياري من B_1 فإن $B_1 = D(\tilde{A})$ إذن $\tilde{A}$ توسيع لـــ A.

2- سنبرهن أن $\tilde{A}$ خطي. فإذا كان x^1 و x^2 عنصرين من B_1، إذن توجد متتاليتان $\{Ax_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{Ax_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ من $D(A)$ بحيث يكون:

$$x_n^1 \xrightarrow[n\to\infty]{} x^1 \quad و \quad x_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} x^2$$

ويكون:

$$\tilde{A}(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) = \lim_{n\to\infty} A(\lambda_1 x_n^1 + \lambda_2 x_n^2)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \lambda_1 A x_n^1 + \lim_{n\to\infty} \lambda_2 A x_n^2) = \lambda_1 \tilde{A}x^1 + \lambda_2 \tilde{A}x^2$$

(ملاحظات بخط اليد في الهامش: $y = \tilde{A}x$ ، خطي مستمر ، $\tilde{A}x = Ax$ ، $x \in D(A)$ ، $\tilde{A}x^1 = \lim A x_n^1$ ، $\tilde{A}x^2 = \lim A x_n^2$)

إذن أياً كان العنصران x^1 و x^2 فإن:

$$\tilde{A}(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) = \lambda_1 \tilde{A}x^1 + \lambda_2 \tilde{A}x^2$$

وبالتالي فإن $\tilde{A}$ خطي.

3- لنبرهن أن $\tilde{A}$ محدود. مهما تكن $x \in B_1$ توجد متتالية مناسبة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A)$ بحيث $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ وبالتالي نجد بحسب (12) ما يلي:

$\|\tilde{A}x\| \le c\|x\|$
$\|Ax_n\| \le c\|x_n\|$
$\|\tilde{A}x\| \le c\|x\|$

$$\|\tilde{A}x\|_{B_2} = \lim_{n\to\infty}\|Ax_n\|_{B_2} \le \lim_{n\to\infty}\left[C\|x_n\|_{B_1}\right] = C\|x\|_{B_1}$$

إذاً:

$$\|\tilde{A}x\|_{B_2} \le C\|x\|_{B_1} \; ; \; \forall x \in B_1$$

وهذا يعني أن المؤثر $\tilde{A}$ محدود.

مما تقدم نجد أن $L_B(B_1 \longrightarrow B_2) \ni \tilde{A}$ وأنه تمديد للمؤثر المفروض A.

إن هذا التمديد $\tilde{A}$ وحيد، لأنه لو كان هناك تمديد آخر للمؤثر المفروض A وليكن $L_B(B_1 \longrightarrow B_2) \ni \tilde{\tilde{A}}$ لكان من أجل أي $B_1 \ni x$ توجد متتالية $D(A) \supseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث إن $x_n \longrightarrow x$ وبالتالي لوجدنا:

$$\tilde{\tilde{A}}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \tilde{A}x \; ; \; \forall x \in B_1$$

وهذا يؤدي إلى أن:

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$$

لنثبت أخيراً أن $\|\tilde{A}\| = \|A\|$ (حيث $D(A) \subseteq B_1$ بينما $D(\tilde{A}) \subseteq B_1$).

في الحقيقة لدينا:

$$\|\tilde{A}x\|_{B_2} \le \|\tilde{A}\|\|x\|_{B_1} \; ; \; \forall x \in B_1$$

وبشكل خاص عندما $D(A) \ni x$ فإن $\tilde{A}x = Ax$ وبالتالي:

$$\|\tilde{A}x\|_{B_2} \le \|\tilde{A}\|\|x\|_{B_1}$$

وهذا يؤدي:

$$\|A\|_{B_2} \le \|\tilde{A}\| \qquad (13)$$

من العلاقة:

$$\|Ax_n\|_{B_2} \le \|A\|\|x_n\|_{B_1}$$

حيث: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A)$.

وعندما $n \to \infty$ نجد أن:

$$\|\tilde{A}x\|_{B_2} \le \|A\|\|x\|_{B_1} \; ; \; \forall x \in B_1$$

وبالتالي يكون:

$$\|\tilde{A}\| \leq \|A\| \qquad (14)$$

من المتراجحتين (13) و(14) نستنتج أن $\|\tilde{A}\| = \|A\|$ وهو المطلوب.

(٥-٩) المؤثرات الخطية ومبرهنة البيان المغلق :

(Closed graph theorem)

بما أن للمؤثرات الخطية غير المحدودة أهمية لا تقل عن المؤثرات الخطية المحدودة كالمؤثر التفاضلي مثلاً في مجال الرياضيات التطبيقية فلقد دعت الحاجة إلى دراسة مجموعة قيم المؤثر بعد تطبيقه على فضاء ما معين لتحديد سلوك العديد من المؤثرات.

تعريف (٢٠) :

ليكن E_1 و E_2 فضاءين خطيين منظمين، وليكن A مؤثراً خطياً ساحته $E_1 \supset D(A)$ بحيث $A : D(A) \longrightarrow E_2$.

نقول عن المؤثر A إنه مؤثر خطي مغلق إذا كان بيانه $G(A)$ حيث:

$$G(A) = \{ (\xi_1, \xi_2) \; : \; \xi_1 \in D(A) \; , \; \xi_2 = A\,\xi_1 \}$$

مغلقاً في الفضاء المنظم $E_1 \times E_2$.

في الفضاء المنظم $E_1 \times E_2$ تعرف العمليتان الجبريتان بالشكل:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

حيث α عدد ما. ويعرف النظيم $E_1 \times E_2$ بالمساواة:

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \qquad (15)$$

مبرهنة (١٦) :

ليكن B_1 و B_2 فضاءي باناخ وليكن المؤثر T حيث:

$$T : D(T) \longrightarrow B_2 \; ; \; D(T) \subset B_1$$

مؤثراً خطياً مغلقاً، إذا كانت $D(T)$ مغلقة في B_1 عندئذ يكون المؤثر T محدوداً.